Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Katedra geodetických základov

Výskumná analýza kvázigeoidu novej generácie pre územie Slovenskej republiky

(Gravimetrický model slovenského kvázigeoidu GMSQ2019)

Technická správa

Objednávateľ:	Úrad geodézie, kartografie a katastra Slovenskej republiky
Zhotoviteľ:	Ing. Blažej Bucha, PhD., Ing. Juraj Papčo, PhD., prof. Ing. Juraj Janák, PhD.
Účel:	Pre potreby a plnenie úloh rezortu geodézie, kartografie a katastra SR
Dátum:	12. 12. 2019

Abstrakt

Gravimetric Model of the Slovak Quasigeoid 2019 (GMSQ2019) je digitálny model gravimetrického kvázigeoidu pre územie Slovenskej republiky v priestorovom rozlíšení 2" na povrchu ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80 (približne 20.5 milióna bodov). GMSQ2019 pozostáva z troch zložiek: (i) globálny model tiažového poľa EIGEN-6C4 pokrývajúci vlnové dĺžky do ∼9 km, (ii) regionálny model tiažového poľa založený na sférických radiálnych bázových funkciách (detail do ∼900 m), a (iii) reziduálny model terénu aproximujúci jemné variácie tiažového poľa až do rozlíšenia ∼60 m. Na základe validácie voči nezávislým kontrolným výškam kvázigeoidu určeným GNSS/niveláciou v 8 838 bodoch je presnosť GMSQ2019 odhadovaná na 4.3 cm z pohľadu štandardnej odchýlky. Zistené minimálne a maximálne rozdiely dosahujú hodnoty −0.9907 a −0.0667 m. Stredná hodnota rozdielov je −0.5437 m, čo naznačuje nevyhnutnosť vertikálneho posunu kvázigeoidu o túto alebo jej blízku hodnotu (s opačným znamienkom). Časť tejto strednej hodnoty môže pochádzať z neznalosti hodnoty skutočného tiažového potenciálu v bode, na ktorý je pripojený Baltský systém po vyrovnaní, rozdielnosti použitých slapových modelov, či z aproximácií použitých vo výpočte. Osobitnou validáciou na vybranej množine 34 kvalitných GNSS/nivelačných bodov (elipsoidická výška určená z permanentných GNSS meraní) bola získaná stredná chyba s hodnotou 1.9 cm. Uskutočnené validácie tiež naznačujú systematické priestorovo korelované rozdiely medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými GNSS/nivelačnými bodmi. Autorom nie je známe, či sú tieto deformácie zapríčinené chybami modelu GMSQ2019 alebo systematickými chybami v Štátnej nivelačnej sieti. Kvázigeoid GMSQ2019 nie je nijakým spôsobom fitovaný na GNSS/nivelačné body.

Obsah

1 Úvod **4**

2 Metodika výpočtu a vstupné dáta **5**

2.1 Výpočet poruchového potenciálu 6

2.1.1 Globálny model tiažového poľa 6

2.1.2 Reziduálny terénny model 8

2.1.3 Sférické radiálne bázové funkcie 9

3 Kvázigeoid GMSQ2019 a jeho validácia **12**

4 Limity kvázigeoidu GMSQ2019 a výzvy do budúcnosti **21**

5 Záver **24**

6 Autorské podiely **25**

1 Úvod

Táto technická správu popisuje vývoj kvázigeoidu pre územie Slovenskej republiky s názvom *Gravimetric Model of the Slovak Quasigeoid 2019* (GMSQ2019). Po teoretickom predstavení použitých konceptov a dát v Kapitole 2 je kvázigeoid validovaný voči nezávislým referenčným hodnotám určeným z GNSS/nivelácie (Kapitola 3). Limity kvázigeoidu GMSQ2019 vyplývajúce z použitých modelovacích metód a vstupných dát sú diskutované v Kapitole 4. V tejto kapitole je tiež uvedených niekoľko hlavných výziev, ktoré môžu byť v budúcnosti kľúčové pre zvýšenie presnosti modelov kvázigeoidu v oblasti Slovenskej republiky. Zhrnutie technickej správy je poskytnuté v Kapitole 5.

2 Metodika výpočtu a vstupné dáta

Kvázigeoid GMSQ2019 bol vypočítaný vzťahom (napr. Hoffmann-Wellenhof and Moritz, 2005; Moritz, 1980)

$$\zeta = \frac{T(P) + \delta T_{\text{atm}}(P)}{\gamma(Q)}, \tag{1}$$

kde $T(P)$ je hodnota poruchového potenciálu v bode P na povrchu Zeme, $\delta T_{\text{atm}}(P)$ je atmosférická korekcia na poruchový potenciál a $\gamma(Q)$ je zložka vektora normálneho tiažového zrýchlenia v bode Q na teluroide v smere elipsoidickej normály prechádzajúcej bodom P. Pre účely výpočtu kvázigeoidu GMSQ2019 bolo normálne pole generované ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80 (Moritz, 2000). Nakoľko výpočet člena $\gamma(Q)$ je triviálny (napr. Hoffmann-Wellenhof and Moritz, 2005), v technickej správe sa venujeme najmä výpočtu poruchového potenciálu $T(P)$ (Kapitola 2.1). Hodnota atmosférickej korekcie $\delta T_{\text{atm}}(P)$ (pozri napr. rovnicu 49-15 v Moritz, 1980) bola vypočítaná numerickou integráciou atmosférickej korekcie na tiažové zrýchlenie $\delta g_{\text{atm}}(P)$. Na výpočet $\delta g_{\text{atm}}(P)$ bol použitý vzťah (5) z článku Balmino et al. (2012).

V prípade, že poloha bodu Q je vopred neznáma, čo znemožňuje výpočet menovateľa vo vzťahu (1), môže byť vypočítaná iteračne. V nultej iterácii je vypočítaná približná výška kvázigeoidu vzťahom

$$\zeta_0 = \frac{T(P) + \delta T_{\text{atm}}(P)}{\gamma(P)}. \tag{2}$$

Následným odčítaním hodnoty ζ_0 od elipsoidickej výšky bodu P je možné získať približnú elipsoidickú výšku bodu Q_0, čo umožňuje vypočítať ďalšiu iteráciu vzťahom

$$\zeta_1 = \frac{T(P) + \delta T_{\text{atm}}(P)}{\gamma(Q_0)}. \tag{3}$$

Iteračný proces teda môže byť zapísaný nasledovne

$$\zeta_i = \frac{T(P) + \delta T_{\text{atm}}(P)}{\gamma(Q_{i-1})}. \tag{4}$$

Po dosiahnutí vyžadovanej presnosti $|\zeta_i - \zeta_{i-1}| \leq \varepsilon$ môžu byť iterácie zastavené, pričom posledná hodnota ζ_i aproximuje hľadanú hodnotu ζ zo vzťahu (1).

Táto iteračná schéma bola použitá na výpočet GMSQ2019, pričom iteračný process pokračoval, pokým $|\zeta_i - \zeta_{i-1}| > 10^{-10}$ m.

2.1 Výpočet poruchového potenciálu

Poruchový potenciál $T(P)$ bol získaný súčtom troch zložiek

$$T(P) = T_{\mathrm{GGM}}(P) + V_{\mathrm{RTM}}(P) + V_{\mathrm{SRBF}}(P), \tag{5}$$

kde $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ je hodnota poruchového potenciálu z globálneho modelu tiažového poľa (Kapitola 2.1.1), $V_{\mathrm{RTM}}(P)$ je gravitačný potenciál generovaný reziduálnymi terénnymi hmotami (Kapitola 2.1.2) a $V_{\mathrm{SRBF}}(P)$ je gravitačný potenciál z reziduálneho poľa modelovaného pomocou sférických radiálnych bázových funkcií (Kapitola 2.1.3). Takéto reziduálne pole modeluje zostatkový signál, ktorý nebol zachytený globálnym modelom tiažového poľa ani metódou RTM. Zatiaľ čo prvý člen $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ predstavuje poruchový potenciál, zvyšné dva členy, V_{RTM} a V_{SRBF}, sú hodnoty gravitačného potenciálu. Takáto aproximácia nemá prakticky žiadny vplyv na výpočet v dvojitej presnosti, nakoľko príspevok normálneho gravitačného poľa generovaného ekvipotenciálnym elipsoidom vo vlnových dĺžkach kratších ako ∼1000 m (teda na posledné dva členy rovnice 5) je v dvojitej presnosti prakticky nulový.

2.1.1 Globálny model tiažového poľa

Člen $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ v rovnici (5) je daný vzťahom (napr. Hoffmann-Wellenhof and Moritz, 2005)

$$T_{\mathrm{GGM}}(P) = \frac{\mathrm{GM}}{R} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{n} \Delta\bar{V}_{nm}\, \bar{Y}_{nm}(\varphi, \lambda), \tag{6}$$

kde (r, φ, λ) je trojica sférických súradníc výpočtového bodu P (sprievodič, šírka, dĺžka), GM je geocentrická gravitačná konštanta, R je polomer referenčnej sféry, $\Delta\bar{V}_{nm}$ je rozdiel úplne normovaných (4π norma) sférických harmonických koeficientov gravitačného potenciálu Zeme stupňa n a rádu m a obdobných koeficientov prislúchajúcich ekvipotenciálnemu elipsoidu GRS80, $\bar{Y}_{nm}$ sú úplne normované sférické harmonické funkcie a $n_{\max}$ je maximálny stupeň sférického harmonického rozvoja.

Priestorové rozlíšenie člena $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ je dané maximálnym stupňom $n_{\max}$ rozvoja (6), pričom najmenší možný reprezentovateľný prvok poruchové potenciálu $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ v podobe najkratšej polovičnej vlnovej dĺžky

je daný vzťahom (napr. Barthelmes, 2013)

$$d_{\min} = \frac{\pi R}{n_{\max}}. \tag{7}$$

Člen $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ bol vypočítaný z modelu EIGEN-6C4 (Förste et al., 2014) do stupňa 2190. Tento model je do veľkej mieri založený na modeli EGM2008 (Pavlis et al., 2012), no navyše obsahuje obzvlášť GOCE dáta, ktoré neboli dostupné v dobe publikovania modelu EGM2008. Z hľadiska slapových modelov bol EIGEN-6C4 transformovaný z pôvodného Tide Free modelu na Zero Tide model (detaily tejto transformácie je možné nájsť v Bucha et al., 2016). Zero Tide model bol použitý kvôli konzistencii s terestrickými gravimetrickými dátami na území Slovenskej republiky, z ktorých bol vypočítaný člen $V_{\mathrm{SRBF}}(P)$ v rovnici (5) (pozri Kapitolu 2.1.3). Poloha výpočtových bodov bola definovaná elipsoidickým gridom s rozlíšením 2", pričom elipsoidická výška bola získaná súčtom normálnej Molodenského výšky z digitálneho modelu terénu DMR3.5[1] a kvázigeoidu z modelu EGM96 (Lemoine et al., 1998). V tejto súvislosti by mohol byť použitý aj iný kvázigeoid, napr. v súčasnosti záväzný model DVRM (Klobušiak et al., 2005). Je však vhodné spomenúť, že model DMR3.5 je do veľkej miery odvodený zo starých vrstevnicových máp „nadmorských výšok", ktorých referenčná plocha v súčasnosti nie je zrejme známa s dostatočnou presnosťou. Navyše, nakoľko odhadovaná výšková presnosť modelu DMR3.5 je rádovo v metroch, či až desiatkach metroch, použitie kvázigeoidu z modelu EGM96, ktorého rozdiely voči DVRM sú odhadom minimálne o rád menšie, preto nepovažujeme za kritické. Kvázigeoid z modelu EGM96 bol použitý obzvlášť kvôli konzistencii s RTM výpočtami (Kapitola 2.1.2). Považujeme taktiež za vhodné explicitne spomenúť, že vo vzťahu (6) je uvážený aj koeficient $\Delta\bar{V}_{00}$, ktorý zohľadňuje rozdiel v hmotnosti Zeme vyplývajúcej z modelu EIGEN-6C4 a z modelu ekvipotenciálneho elipsoidu GRS80. V angličtine sa tento člen zvykne nazývať *zero-degree term* a napr. podľa Smith (1998) by mal byť uvážený vo výpočte. Tento prístup bol aplikovaný, a to aj napriek tomu, že podľa našich očakávaní je jeho vplyv dôležitý najmä pre presný výpočet celosvetového geoidu/kvázigeoidu. Očakávame, že v regionálnych

[1] https://www.geoportal.sk/sk/udaje/udaje-zbgis/udaje-zbgis/aktualizacia-dmr-3-5.html

aplikáciách sa tento faktor (spolu s niektorými ďalšími faktormi, pozri Kapitolu 4) prenesie do konštantného posunu kvázigeoidu vzhľadom ku GNSS/nivelačným bodom.

Samotný výpočet člena $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ bol uskutočnený pomocou programu GrafLab (Bucha and Janák, 2013), ktorý je napísaný v prostredí MATLAB (`https://www.mathworks.com/`). Použitý bol bodový mód výpočtu (Load data), pričom Legendreove funkcie (napr. Hoffmann-Wellenhof and Moritz, 2005) boli numericky vypočítané modifikovanými doprednými stĺpcovými rekurentnými vzťahmi (Holmes and Featherstone, 2002). Program GrafLab je voľne prístupný na stiahnutie zo stránky `http://edisk.cvt.stuba.sk/~xbuchab/`.

2.1.2 Reziduálny terénny model

Člen $V_{\mathrm{RTM}}(P)$ vo vzťahu (5) aproximuje predovšetkým vlnové dĺžky kratšie ako $d_{\min}$ (pozri vzťah 7), ktoré nie sú obsiahnuté v člene $T_{\mathrm{GGM}}(P)$. Túto chýbajúcu informáciu je možné získať (v aproximácií) pomocou metódy reziduálneho terénneho modelu (pozri napr. Forsberg and Tscherning, 1981; Forsberg, 1984). Tá je založená na modelovaní gravitačného účinku reziduálnych topografických hmôt v okolí výpočtového bodu, využívajúc pritom skutočnosť, že gravitačný účinok hmôt v blízkosti výpočtového bodu je silnejší ako účinok ďalekých hmôt. Dopočítaním gravitačného účinku blízkych hmôt (napr. do vzdialenosti 50 km od výpočtového bodu) je teda možné zvýšiť presnosť výsledného modelu kvázigeoidu (pozri napr. Hirt et al., 2010). Na území Slovenska je možné očakávať zhruba zlepšenie o 25 % (pozri napr. Bucha et al., 2016).

Reziduálne hmoty vzniknú rozdielom detailného a hladkého digitálneho modelu terénu a uvážením konštantnej hustoty. Prvý spomínaný model je zväčša reprezentovaný vo forme gridu a druhý rozvojom do sférického harmonického stupňa $n_{\max}$ (rovnaký stupeň ako v rovnici 6). Na modelovanie gravitačného účinku týchto hmôt bol použitý vlastný softvér, ktorý je založený na aproximácií hmôt pomocou mnohostenu (Tsoulis, 2012) a tesseroidov (Grombein et al., 2013), a následne počíta ich gravitačný účinok. Nakoľko použitie mnohostenu je zvyčajne presnejšie, no časovo náročnejšie ako použitie tesseroidov, mnohosten bol použitý na výpočet gravitačného účinku reziduálnych hmôt do vzdialenosti

0.08° (∼9 km) a tesseroidy boli využité do vzdialenosti 0.5° (∼56 km) od výpočtového bodu. Gravitačný účinok hmôt za touto vzdialenosťou bol zanedbaný, nakoľko uváženie ich vplyvu vyústi do dlhšieho výpočtového času, no zanedbateľného prínosu z pohľadu presnosti (pozri Tabuľku 1 v Bucha et al. 2016). Ďalšie podrobnosti o použitej metóde RTM je možné nájsť v Kapitolách 2.3 a 4.1 článku Bucha et al. (2016).

Na výpočet kvázigeoidu GMSQ2019 boli v metóde RTM použité nasledovné dáta: (i) detailný digitálny model terénu DMR3.5 a za hranicami Slovenskej republiky model SRTM (Jarvis et al., 2008), v oboch prípadoch v priestorovom rozlíšení 2”, pričom SRTM model bol kvôli charakteru výpočtu preinterpolovaný z rozlíšenia 3” na rozlíšenie 2”, (ii) hladký digitálny model terénu bol reprezentovaný modelom DTM2006.0 (Pavlis et al., 2007) do stupňa 2159 v priestorovom rozlíšení 2”, (iii) v oboch predošlých prípadoch boli následne získané elipsoidické výšky, a to pripočítaním kvázigeoidu z modelu EGM96, (iv) konštantná hustota topografických hmôt s hodnotou 2670 kg m^{-3}, (v) Newtonová gravitačná konštanta 6.67259×10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}.

Poloha výpočtových bodov v zmysle elipsoidickej šírky a dĺžky je definovaná rovnako, ako v Kapitole 2.1.1. Elipsoidická výška bodov je 0.25 m nad terénom, ktorý je reprezentovaný modelom DMR3.5, resp. SRTM. Táto výška zabezpečí, že výpočtový bod sa nikdy nebude nachádzať v reziduálnych hmotách, čo by malo za následok neharmonický potenciál, ktorý nie je možné použiť na výpočet kvázigeoidu vzťahom (1). Súčasne je však výpočtový bod dostatočne blízko povrchu terénu tak, ako to vyžaduje vzťah (1).

2.1.3 Sférické radiálne bázové funkcie

Napriek tomu, že prvé dva členy na pravej strane rovnice (5) sú schopné zabezpečiť priestorové rozlíšenie kvázigeoidu na úrovni metrov, či dokonca aj vyššie, istá časť signálu ostáva nemodelovaná. Táto diskrepancia vzniká pri generovaní reziduálnych topografických hmôt s konštantnou hustotou, ktorá nezohľadňuje laterálne ani radiálne sa meniacu hustotu skutočných hmôt (presné hustotné modely nie sú dostupné). Na zachytenie tohto zvyškového signálu bol použitý regionálny model gravitačného poľa rozvinutý do radu sférických radiálnych bázových funkcií (Bucha

et al., 2016).

Člen $V_{\mathrm{SRBF}}(P)$ je daný nasledovným rozvojom potenciálu do radu sférických radiálnych bázových funkcií (napr. Freeden and Schneider, 1998),

$$V_{\mathrm{SRBF}}(P) = \sum_{i=1}^{I} a_i \, \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i), \tag{8}$$

kde

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \sum_{n=0}^{n_{\max}^{\mathrm{SRBF}}} \frac{2n+1}{4\pi \, R_{\mathrm{SRBF}}^2} \left(\frac{R_{\mathrm{SRBF}}}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_i) \tag{9}$$

je sférická radiálna bázová funkcia, a_i je koeficient i-tej sférickej radiálnej bázovej funkcie formálne lokalizovanej na referenčnej sfére s polomerom $R_{\mathrm{SRBF}} = 6378136.3$ m $-$ 13000 m (pod zemským povrchom na území Slovenskej republiky), I je počet radiálnych bázových funkcií, $n_{\max}^{\mathrm{SRBF}}$ je maximálny harmonický stupeň rozvoja, P_n je nenormovaný Legendreov polynóm stupňa n, $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}_i$ sú polohové vektory výpočtového bodu a uzlového bodu i-tej radiálnej bázovej funkcie a ψ_i je ich vzájomná sférická vzdialenosť.

Pre územie Slovenskej republiky bolo v článku Bucha et al. (2016) vypočítaných spolu $I = 77\,769$ koeficientov a_i (pozri vzťah 8) s použitím maximálneho harmonického stupňa $n_{\max}^{\mathrm{SRBF}} = 21\,600$. V skratke, tieto koeficienty boli vypočítané z približne 300 000 terestrických gravimetrických meraní, ktoré, na rozdiel od RTM metódy, reflektujú reálne hustotné nehomogenity, a tak môžu byť použité na ďalšie zvýšenie presnosti a kompletnosti výsledného kvázigeoidu. Koeficienty a_i boli vypočítané metódou najmenších štvorcov, a tak ide vôbec o prvý kvázigeoid na území Slovenskej republiky, v ktorom bola terestrická gravimetrická databáza použitá ako vstup do metódy najmenších štvorcov. Detailný popis modelu založeného na sférických radiálnych bázových funkciách, jeho predností a slabostí je možné nájsť v článku Bucha et al. (2016).

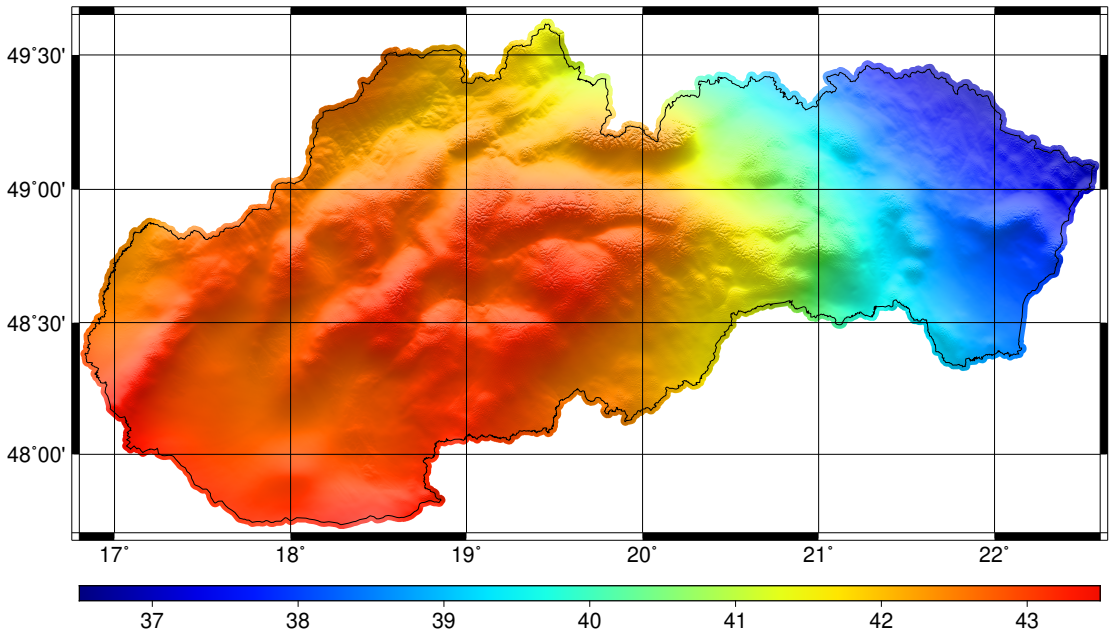
Poloha výpočtových bodov je definovaná rovnako, ako v Kapitole 2.1.1. Kvôli zníženiu výpočtovej náročnosti rovnice (8) bol však člen $V_{\mathrm{SRBF}}(P)$ vypočítaný v gride s rozlíšením 4”. Výsledný grid s rozlíšením 2”, ktorý je potrebný pre finálny model kvázigeoidu, bol získaný následnou bikubickou interpoláciou. Vzhľadom na to, že priestorové rozlíšenie prislúchajúce maximálnemu stupňu 21 600 v rovnici (9)

je 30”, rozlíšenie 4” zabezpečuje 7.5 násobné prevzorkovanie signálu, vďaka čomu je možné interpolačné chyby spoľahlivo zanedbať. Výpočet člena $V_{\mathrm{SRBF}}(P)$ bol realizovaný v prostredí MATLAB s použitím `SRBF_package` (Bucha et al., 2016), ktorý je voľne prístupný na stránke `http://edisk.cvt.stuba.sk/~xbuchab/`.

3 Kvázigeoid GMSQ2019 a jeho validácia

Grafické znázornenie výšok kvázigeoidu GMSQ2019 nad ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80 je uvedené na Obr. 1. Aby bolo možné v praktických aplikáciách interpolovať z modelu GMSQ2019 aj v pohraničných oblastiach, kvázigeoid bol vypočítaný až do vzdialenosti 1' (∼1.9 km) od hraníc Slovenskej republiky. Celkový počet bodov kvázigeoidu je 20 455 347.

Kvázigeoid GMSQ2019 bol testovaný na množine 8 916 nezávislých GNSS/nivelačných bodov poskytnutých Geodetickým a kartografickým ústavom Bratislava. Počas prvej validácie bolo v tejto referenčnej množine identifikovaných niekoľko vzoriek zaťažených hrubými chybami. Výška kvázigeoidu v týchto bodoch dosahovala minimálnu a maximálnu hodnotu približne −177 m a 272 m, čo vzhľadom na známy rozsah výšok kvázigeoidu na území Slovenska (zhruba 35 až 45 m) možno považovať za odľahlé merania. Nakoľko presnosť poskytnutých referenčných bodov nie je autorom známa, na odstránenie odľahlých meraní z referenčnej vzorky bolo zvolené v zásade arbitrárne kritérium ±0.5 m, teda centrované rozdiely (t.j. po odstránení strednej hodnoty rozdielov) medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými GNSS/nivelačnými bodmi nepatriace do tohto intervalu boli zo vzorky referenčných bodov vylúčené. Domnie-



Obr. 1: Kvázigeoid GMSQ2019 (m). Obrázok je vo vysokom rozlíšení. Jeho zväčšením je možné pozorovať jemné variácie priebehu kvázigeoidu.

vame sa, že toto kritérium je dostatočne voľné na to, aby boli zachované všetky referenčné body s prijateľnou presnosťou, no zároveň spoľahlivo vylúči odľahlé referenčné hodnoty. Do validácie teda vstupovalo spolu 8 838 referenčných GNSS/nivelačných bodov spĺňajúcich zvolené kritérium (78 bodov vylúčených). Túto množinu bodov budeme označovať písmenom A. Napriek tomu, že uvedený interval akceptovaných hodnôt je dostatočne široký, považujeme za potrebné ešte raz zdôrazniť arbitrárnosť jeho zvolenia, nakoľko nevyhnutne ovplyvňuje aj nižšie uvedenú validáciu kvázigeoidu GMSQ2019.

Z množiny bodov A boli následne vytvorené štyri podmnožiny referenčných bodov, B až E. Množinu B tvorí 34 referenčných bodov, v ktorých očakávame najvyššiu presnosť kvázigeoidu. V dátovom súbore poskytnutom Geodetickým a kartografickým ústavom Bratislava majú body množiny B pre atribút `KOD_ETRS` vzťahujúci sa k elipsoidickým výškam hodnotu `PERM` (permanentné merania, ETRF 2000). Elipsoidická výška bodov množiny B je teda určená z permanentných meraní, a tak očakávame, že jej presnosť je vyššia ako v ostatných bodoch množiny A. Množinu C tvorí spolu 46 bodov s atribútom `EPOCH` (epochové merania, ETRF 2000), ktorých očakávaná presnosť je nižšia ako v množine B. Množinu D tvorí 1088 bodov s atribútom `S0-2` až `S0-6` a `S1`. Množina E pozostáva zo 7669 bodov s atribútom `D0`, `D01` a `D1` až `D3`. Očakávame, že takéto odčlenenie množín B až E od množiny A môže poskytnúť dodatočný pohľad na kvalitu modelu GMSQ2019.

Pre účely tohto testovania bol kvázigeoid GMSQ2019 interpolovaný z bodov gridu do polohy GNSS/nivelačných bodov množín A až E pomocou bilineárnej metódy v programe MATLAB R2019b. Táto metóda bola zvolená zámerne, nakoľko ju považujeme za konceptuálne najjednoduchšiu a výpočtovo najmenej náročnú. Touto voľbou je teda demonštrovaná presnosť, ktorú možno dosiahnuť za ľahko splniteľných podmienok. Pre úplnosť dodávame, že použitie komplexnejšej bikubickej interpolačnej metódy ovplyvňuje výsledky validácie, ktoré budú uvedené v Tabuľke 1, rádovo v stotinách milimetra, čo vzhľadom na očakávanú približne centrimetrovú presnosť kvázigeoidu považujeme za zanedbateľné.

Štatistika rozdielov v Tabuľke 1 ukazuje, že najnižšia stredná chyba 1.9 cm bola dosiahnutá na množine najpresnejších referenčných

Tabuľka 1: Rozdiely vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a GNSS/nivelačnými bodmi bez odstránenia strednej hodnoty rozdielov. STD predstavuje štandardnú odchýlku. Grafické znázornenie rozdielov je uvedené na Obr. 2 až 6. Histogramy sú zobrazené na Obr. 7 až 11. Všetky hodnoty v tabuľke sú uvedené v metroch.

Množina bodov	Počet bodov	min	max	mean	STD
A	8 838	−0.9907	−0.0667	−0.5437	0.0431
B	34	−0.5860	−0.5119	−0.5461	0.0186
C	46	−0.5925	−0.4881	−0.5410	0.0251
D	1 088	−0.6627	−0.4561	−0.5391	0.0211
E	7 669	−0.9907	−0.0921	−0.5444	0.0452

bodov B. Naopak, najvyššia stredná chyba 4.5 cm je pozorovaná pre množinu E. Grafické znázornenie získaných rozdielov je uvedené na Obr. 2 až 6.

Z rozdielov v Tabuľke 1 je ďalej zreteľný konštantný posun kvázigeoidu GMSQ2019 voči kvázigeoidu z GNSS/nivelačných bodov dosahujúci hodnotu −0.5437 m (získaný na základe najväčšej množiny bodov A). Predpokladáme, že tento výrazný konštantný posun môže byť spôsobený niektorým z nasledovných faktorov, ich kombináciou, či inými neznámymi vplyvmi.

- Autorom nie je známa hodnota tiažového potenciálu bodu, na ktorý je pripojená Štátna nivelačná sieť v Baltskom systéme po vyrovnaní, a teda je možné, že kvázigeoid GMSQ2019 sa vzťahuje k inej referenčnej hodnote tiažového potenciálu ako Baltský systém po vyrovnaní. Referenčná hodnota tiažového potenciálu, ku ktorému je vztiahnutý model GMSQ2019 sa nepriamo nachádza v rovnici (5) v členoch $T(P)$ a $\gamma(Q)$. V nich totiž vystupuje normálne tiažového pole generované ekvipotenciálnym elipsoidom GRS80, ktoré však bolo pri jeho definícii volené tak, aby optimálne vystihovalo celosvetový priebeh geoidu, resp. tiažového poľa Zeme. Následkom tejto skutočnosti môže vznikať prinajmenšom čiastočný vertikálny posun kvázigeoidu z GMSQ2019.

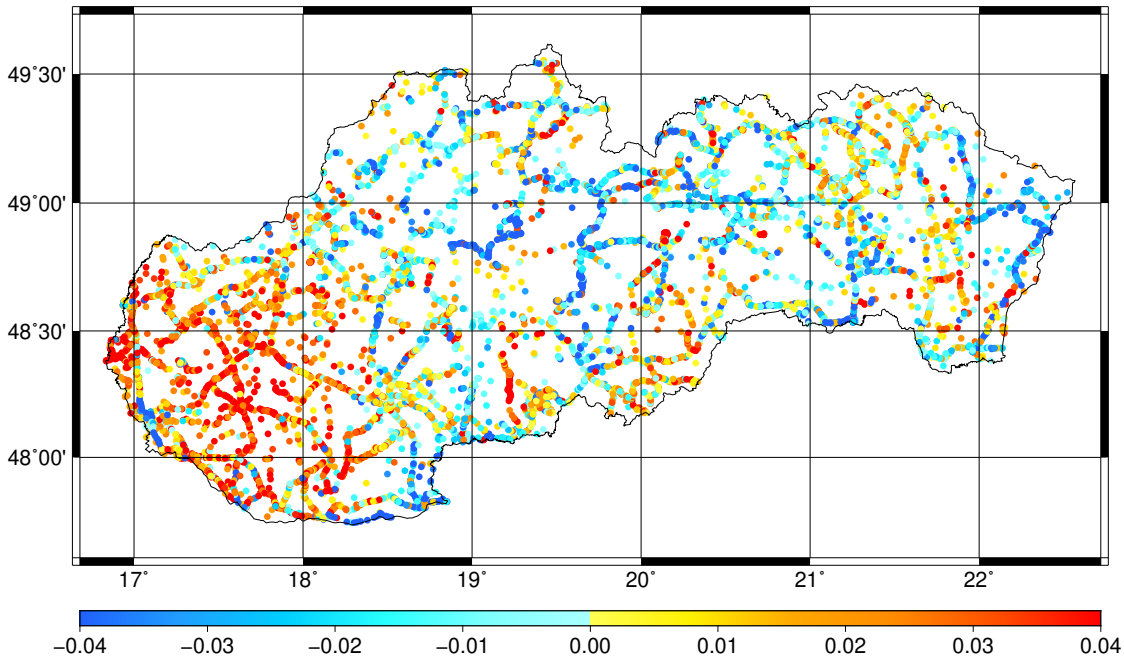
- Kvázigeoid GMSQ2019 je poskytnutý v Zero Tide slapovom modeli, resp. domnievame sa, že sa najviac približuje práve tomuto modelu, a to z dôvodu použitia Zero Tide modelu v EIGEN-6C4 a v terestric-

kých gravimetrických meraniach. Kvázigeoid z GNSS/nivelačných bodov je, ako očakávame, vyjadrený v Mean Tide slapovom modeli, čo môže spôsobovať menšiu časť uvedeného konštantného rozdielu. Rozdiel medzi týmito slapovými modelmi je prevažne v smere elipsoidickej šírky a pre územie Slovenskej republiky dosahuje v absolútnom zmysle hodnotu zhruba 7 cm (Mäkinen, 2008).

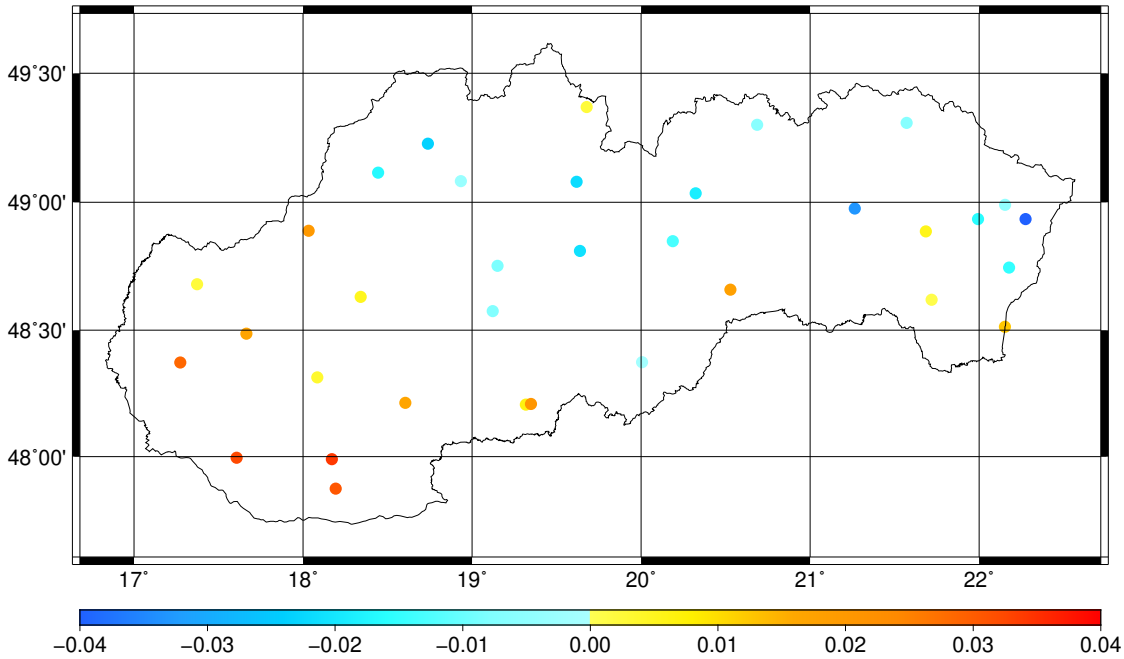
- Neznalosť terestrických gravimetrických meraní za hranicami Slovenskej republiky spôsobuje nejednoznačnosť v riešení danej úlohy (pozri napr. Klees et al., 2008), následkom čoho môže vznikať systematický posun.

- Nemožno tiež vylúčiť, že prinajmenšom časť pozorovaného konštantného rozdielu je spôsobená systematickým posunom kvázigeoidu z GNSS/nivelačných bodov. Overenie tejto hypotézy či dokonca spoľahlivá kvantifikácia sa však nejavia byť v súčasnosti možné.

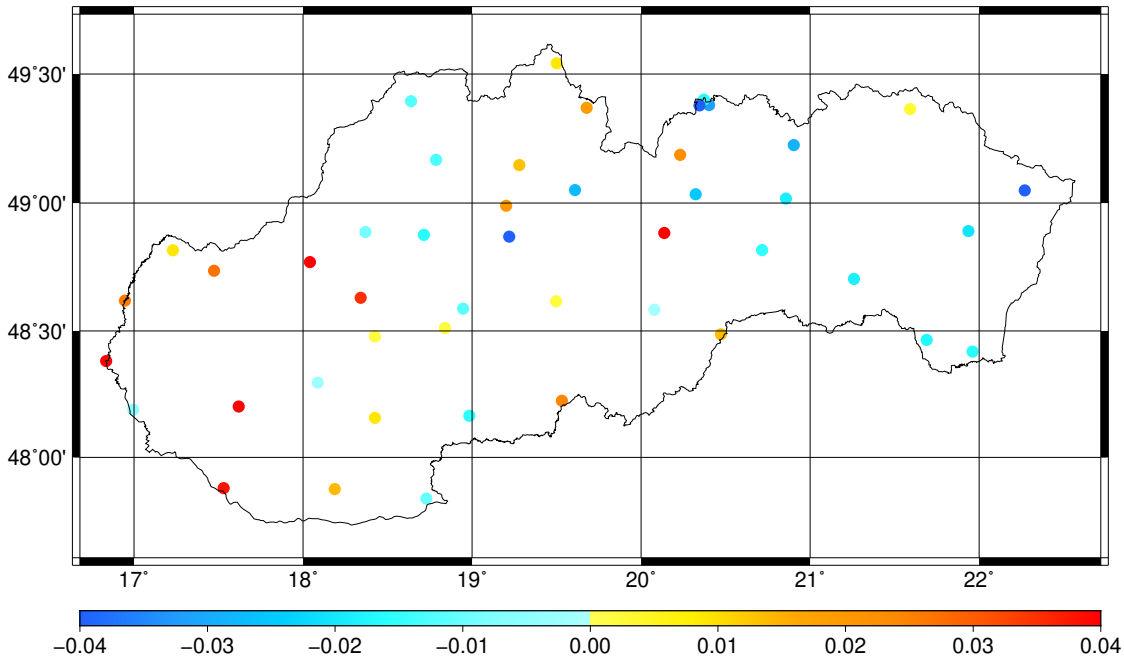
Pred použitím modelu GMSQ2019 musí teda najprv dôjsť k jeho vertikálnemu posunu o konštantnú hodnotu približne +0.5437 m (fitovanie o konštantnú hodnotu). Z grafického znázornenia na Obr. 2 (množina A) sa však vizuálne ukazuje aj systematický priestorovo korelovaný charakter rozdielov. Autorom nie je známe, či ide o systematické deformácie kvázigeoidu GMSQ2019 alebo referenčných GNSS/nivelačných bodov. Fitovanie kvázigeoidu GMSQ2019 polynómom vyššieho stupňa teda môže zvýšiť presnosť transformácie elipsoidických výšok určených GNSS technológiou na normálne výšky podľa Molodenského realizované Štátnou nivelačnou sieťou. Na záver uvádzame na Obr. 7 až 11 histogramy rozdielov získaných pre množiny bodov A až E.



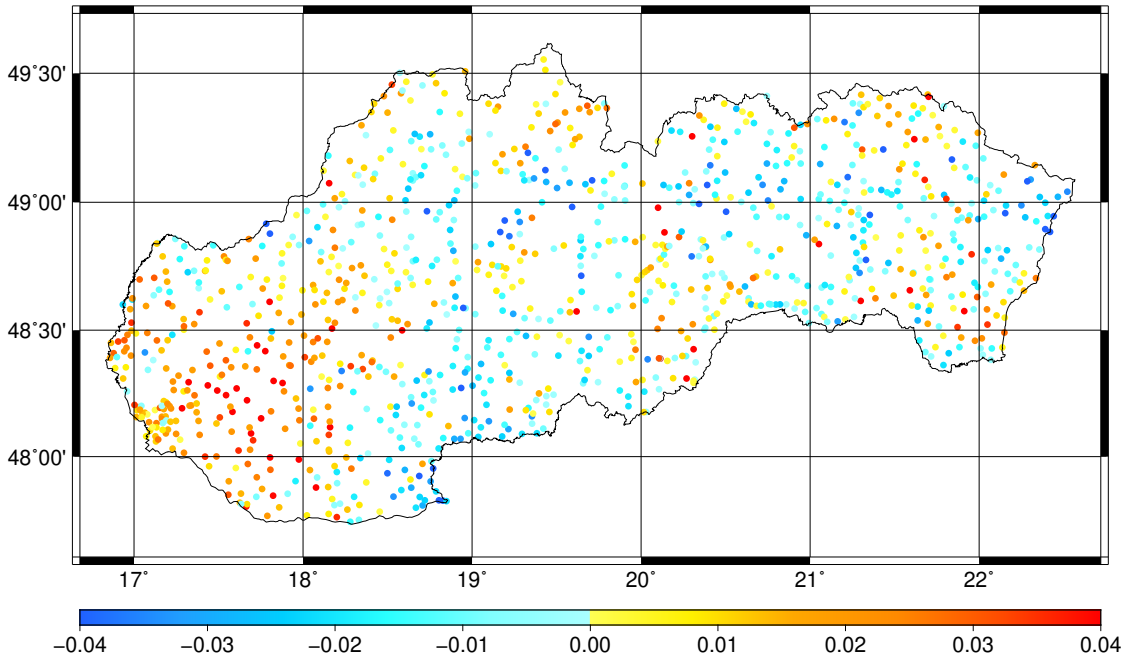
Obr. 2: Rozdiely (m) vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina A, 8 838 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Rozdiely sú zobrazené po odstránení ich strednej hodnoty.



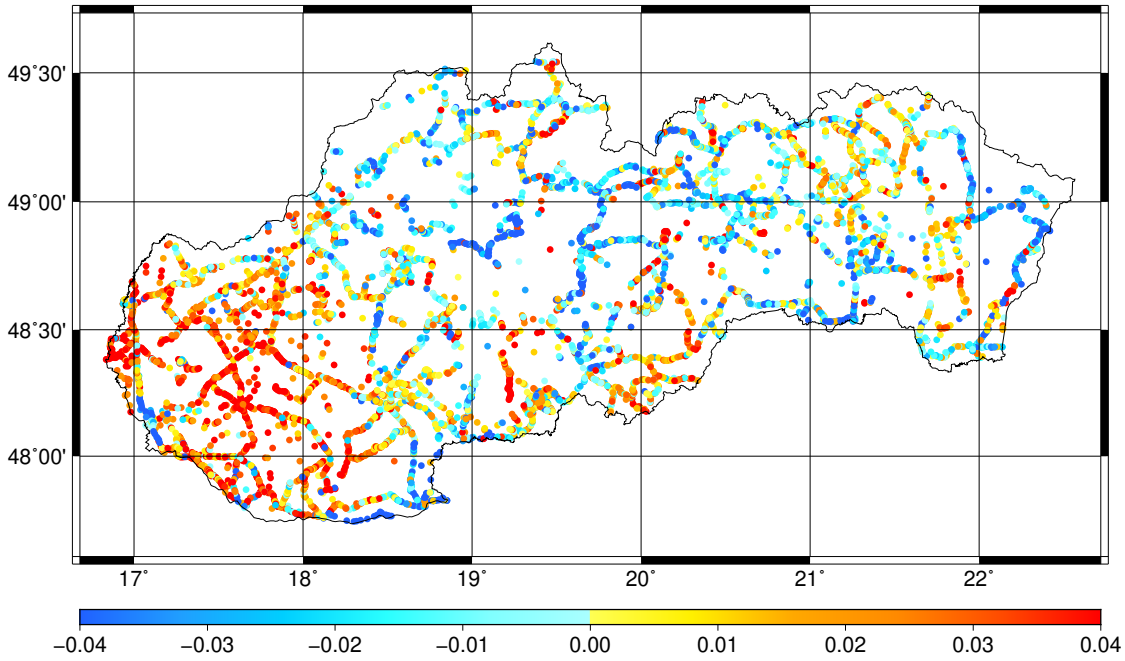
Obr. 3: Rozdiely (m) vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina B, 34 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Rozdiely sú zobrazené po odstránení ich strednej hodnoty.



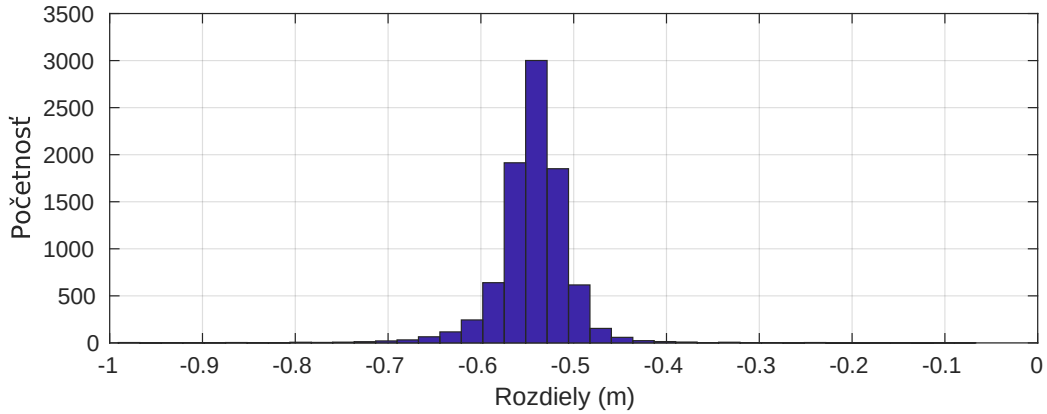
Obr. 4: Rozdiely (m) vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina C, 46 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Rozdiely sú zobrazené po odstránení ich strednej hodnoty.



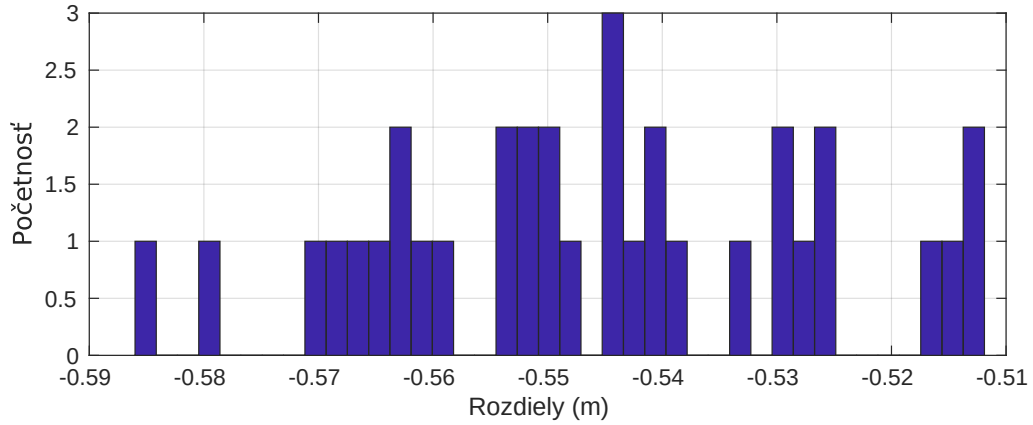
Obr. 5: Rozdiely (m) vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina D, 1 088 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Rozdiely sú zobrazené po odstránení ich strednej hodnoty.



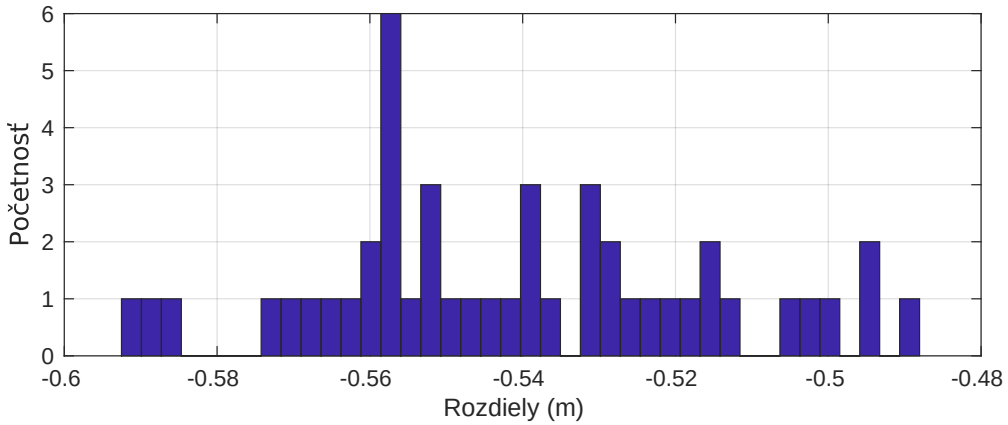
Obr. 6: Rozdiely (m) vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina E, 7 669 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Rozdiely sú zobrazené po odstránení ich strednej hodnoty.



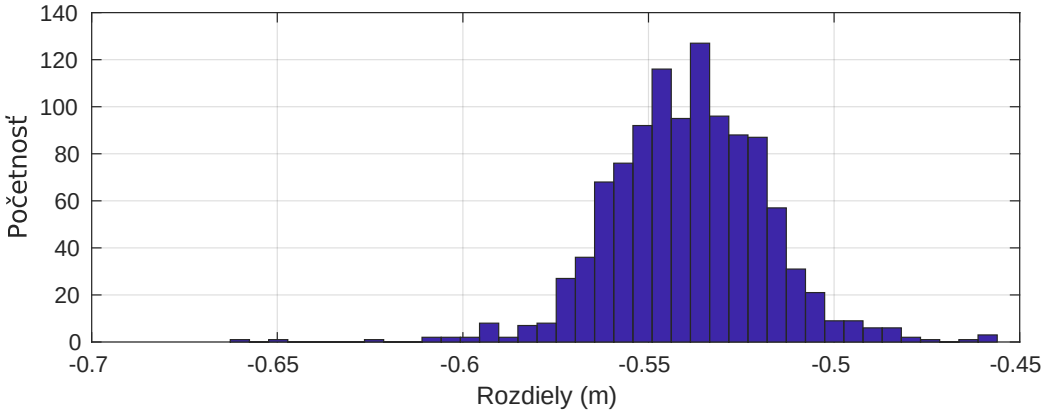
Obr. 7: Početnosť rozdielov vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina A, 8 838 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Zo zobrazených rozdielov nebola odstránená stredná hodnota.



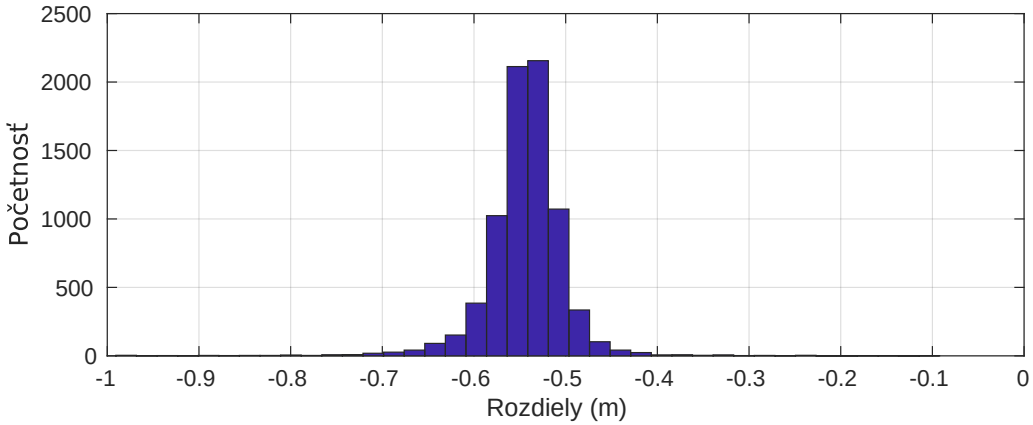
Obr. 8: Početnosť rozdielov vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina B, 34 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Zo zobrazených rozdielov nebola odstránená stredná hodnota.



Obr. 9: Početnosť rozdielov vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina C, 46 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Zo zobrazených rozdielov nebola odstránená stredná hodnota.



Obr. 10: Početnosť rozdielov vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina D, 1088 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Zo zobrazených rozdielov nebola odstránená stredná hodnota.



Obr. 11: Početnosť rozdielov vo výške kvázigeoidu medzi modelom GMSQ2019 a referenčnými hodnotami z GNSS/nivelácie (množina E, 7669 bodov). Štatistika rozdielov je uvedená v Tabuľke 1. Zo zobrazených rozdielov nebola odstránená stredná hodnota.

4 Limity kvázigeoidu GMSQ2019 a výzvy do budúcnosti

Medzi hlavné limity a nedostatky kvázigeoidu GMSQ2019, vyplývajúce či už z použitých metód alebo dát, zaraďujeme nasledovné body.

- *Kvalita DMR3.5* Jeden z kľúčových prvkov kvázigeoidu GMSQ2019 je člen $V_{\mathrm{RTM}}(P)$, teda gravitačný účinok reziduálnych hmôt terénu. Kvalitu použitého modelu DMR3.5 na reprezentáciu terénu považujeme v súčasnosti za nedostatočnú a za jeden z faktorov, ktoré znižujú presnosť výsledného kvázigeoidu. Pri detailnejšom pohľade na Obr. 1 je možné pozorovať v niektorých oblastiach napríklad neprirodzené mierne deformácie kvázigeoidu v smere elipsoidickej dĺžky (napr. v okolí Martina, Ružomberka a pod.). Zobrazenie členov T_{GGM}, V_{RTM} a V_{SRBF} ukázalo, že tieto chyby pochádzajú z člena V_{RTM}, teda ich pôvodcom je digitálny model terénu DMR3.5. V súčasnosti však stále neexistuje presnejší celoslovenský digitálny model terénu, ktorý by mohol nahradiť DMR3.5.

- *Kvalita terestrických gravimetrických databáz* V nedávnej dobe bola vyvinutá enormná snaha o zlepšenie kvality terestrickej gravimetrickej databázy (Pašteka et al., 2014; Zahorec et al., 2017) použitej na výpočet koeficientov a_i v člene $T_{\mathrm{SRBF}}(P)$ (vzťah 8), a to najmä homogenizáciou databázy, identifikáciou možných odľahlých meraní, odstránením systematických chýb a pod. Napriek tomu, mnohé z bodov databázy boli odmerané pred desiatkami rokov zastaralými prístrojmi a postupmi, a tak nemôžu z hľadiska presnosti súťažiť so súčasnými dosiahnuteľnými presnosťami. Istou kompenzáciou za nižšiu kvalitu dát je však ich vysoká kvantita.

- *Slapový model Zero Tide* Kvázigeoid GMSQ2019 je vypočítaný v slapovom modeli Zero Tide. Štátna nivelačná sieť je však vedená v Mean Tide modeli. Pre použitie kvázigeoidu GMSQ2019 v súvislosti so Štátnou nivelačnou sieťou je preto potrebné buď vykonať transformáciu zo Zero Tide do Mean Tide modelu, alebo jednoducho vertikálne posunúť kvázigeoid o strednú hodnotu približne +0.5437 m a zanedbať šírkový trend, čím sa získa kvázigeoid

použiteľný v praktických aplikáciách.

- *Metóda RTM* Od času publikovania článku Bucha et al. (2016), na ktorom je založený kvázigeoid GMSQ2019, došlo k niekoľkým zlepšeniam v metóde RTM (napr. Rexer et al., 2018; Hirt et al., 2019a; Bucha et al., 2019). Očakávame, že aplikácia týchto vylepšených RTM metód by mohla spresniť člen $V_{\mathrm{RTM}}(P)$. Člen $V_{\mathrm{SRBF}}(P)$ je však závislý od člena $V_{\mathrm{RTM}}(P)$ a je schopný (prinajmenšom čiastočne) eliminovať nedostatky použitej RTM metódy. Tento pozitívny efekt je spôsobený použitou technikou remove–compute–restore (pozri napr. Hoffmann-Wellenhof and Moritz, 2005), na ktorú sa zdajú byť chyby RTM metódy náchylné len minimálne (Bucha et al., 2019). Je potrebné mať tiež na pamäti, že člen $V_{\mathrm{RTM}}(P)$ je založený na uvážení konštantnej hustoty topografických hmôt. Nezohľadňuje teda hustotné nehomogenity pod zemským povrchom, a teda kvázigeoid GMSQ2019 vo vlnových dĺžkach kratších ako 30" ($\sim$900 m) nemôže byť nijakým spôsobom geofyzikálne interpretovaný.

- *Rozlíšenie* Napriek tomu, že priestorové rozlíšenie kvázigeoidu GMSQ2019 sú 2", čiže približne desaťnásobne vyššie rozlíšenie ako v predošlých modeloch, v praktických aplikáciách je potrebné interpolovať kvázigeoid do príslušného výpočtového bodu, čo nevyhnutne so sebou prináša interpolačné chyby. Vzhľadom na pokrok v oblasti výpočtovej techniky a samotných modelovacích metód preto očakávame, že toto rozlíšenie sa stane v dohľadnej dobe prinízkym. Pre porovnanie, v súčasnosti existujú napr. takmer globálne mapy topografických redukcií a RTM tiažového zrýchlenia v priestorovom rozlíšení 3" (Hirt et al., 2019b).

- *Vysokohorské oblasti* Vo vysokohorských oblastiach sa krátkovlnná zložka kvázigeoidu GMSQ2019 spolieha predovšetkým na metódu RTM, nakoľko terestrické gravimetrické merania sú v týchto lokalitách zväčša riedke. Nízka kvalita DMR3.5 modelu (jeden zo vstupov do RTM metódy) a komplexnosť modelovacích techník v hornatých častiach krajiny majú teda za následok predpokladanú zníženú kvalitu modelu v lokalitách s komplikovaným priebehom topografie, napr. vo Vysokých či Nízkych Tatrách.

- *Pohraničné oblasti* V pohraničných oblastiach očakávame zníženú kvalitu modelu GMSQ2019, nakoľko presnosť použitej databázy terestrických gravimetrických meraní za hranicami Slovenskej republiky je nízka, zhruba 2 mGal (pozri databázu GD3 vo Fig. 3 článku Bucha et al., 2016). Ďalším dôvodom je metóda RTM, v ktorej bol za hranicami Slovenskej republiky použitý digitálny model terénu SRTM, zatiaľ čo v jej vnútri bol použitý model DMR3.5. V reprezentácii terénu v pohraničných oblastiach preto očakávame náhle skoky, ktoré sa prenesú do člena $V_{\mathrm{RTM}}(P)$.

Nakoľko kvalita existujúcej databázy terestrických gravimetrických meraní už môže byť len nepatrne zlepšená a nové merania sú časovo a finančne náročné, v rámci realistických výziev do blízkej budúcnosti očakávame zlepšenie modelu kvázigeoidu v prípade použitia kvalitného digitálneho modelu terénu. Ten by ovplyvnil jednak výpočet člena $V_{\mathrm{RTM}}(P)$ z metódy RTM, obzvlášť vo vysokohorských oblastiach, ale tiež by spresnil polohu bodov P na zemskom povrchu, v ktorých sa počíta kvázigeoid (pozri rovnicu 1). Ďalšia výzva, skôr výpočtového charakteru, je spojená s prípadným zvýšením priestorového rozlíšenia zo súčasných 60 m na, povedzme, 10 m. S príchodom nového globálneho modelu gravitačného poľa EGM2020 v roku 2020 (Barnes et al., 2016) sa tiež javí vhodné použiť tento model na výpočet člena $T_{\mathrm{GGM}}(P)$. Zásadnú zmenu v kvalite kvázigeoidu však neočakávame, nakoľko kvalita EGM2020 v oblasti Slovenskej republiky bude zrejme porovnateľná s modelom EIGEN-6C4 a priestorové rozlíšenie modelu EGM2020 zostane s najväčšou pravdepodobnosťou rovnaké ako v modeli EIGEN-6C4 (pozri Barnes et al., 2016). V každom prípade, ak dôjde k zmene digitálnych modelov terénu, či globálnych modelov gravitačného poľa, táto zmena prinesie so sebou potrebu prepočítať aj koeficienty a_i zo vzťahu (8), čo je násobne zložitejší úkon ako výpočet napr. člena $T_{\mathrm{GGM}}(P)$ a pod. (pozri napr. Bucha et al., 2016).

5 Záver

GMSQ2019 je model kvázigeoidu pre územie Slovenskej republiky s presnosťou približne 4.3 cm z pohľadu štandardnej odchýlky. Táto hodnota bola zistená validáciou na 8 838 GNSS/nivelačných bodoch poskytnutých Geodetickým a kartografickým ústavom Bratislava. Nakoľko v tejto množine sa nachádzajú referenčné body vysokej, ale i nízkej presnosti, bolo z nej dôkladne vybratých 34 bodov, na ktorých je elipsoidická výška určená permanentným GNSS meraním, teda s lepšou presnosťou ako v ostatných bodoch. Validáciou na základe tejto menšej, no presnejšej množiny bodov bola zistená štandardná odchýlka rozdielov v hodnote 1.9 cm.

Kvázigeoid GMSQ2019 nie je nijakým spôsobom fitovaný na GNSS/nivelačné body, preto pre jeho správnu aplikáciu je potrebné odčítať od neho prinajmenšom strednú hodnotu -0.5437 m (získaná z validácie), príp. použiť fitovaciu techniku založenú na polynóme vyššieho stupňa. V prípade dostupnosti ďalších kvalitných GNSS/nivelačných bodov, ktoré neboli použité v tejto validácií, odporúčame o ne rozšíriť testovaciu množinu bodov a validáciu zopakovať. Výsledkom by mohol byť spoľahlivejší odhad strednej hodnoty vertikálneho posunu kvázigeoidu, príp. fitovania polynómom vyššieho stupňa.

Napriek tomu, že GMSQ2019 ponúka prinajmenšom jeden z najpresnejších modelov kvázigeoidu pre územie Slovenskej republiky, je potrebné mať na pamäti jeho nedostatky. Tie pramenia, ako sa domnievame, najmä z nízkej alebo priam nedostatočnej kvality predovšetkým digitálneho modelu terénu DMR3.5, ale čiastočne tiež terestrickej gravimetrickej databázy. Priestor na zlepšenie, je však nepochybne možné nájsť aj v použitých modelovacích technikách, napr. v metóde RTM.

6 Autorské podiely

Autori týmto prehlasujú, že na vývoji kvázigeoidu GMSQ2019 a na príprave tejto technickej správy sa podieľali nasledovnými podielmi.

- *Blažej Bucha* Príprava rukopisu technickej správy a diskusia k nej, príprava metodiky výpočtu, výskum a vývoj použitého softvéru, príprava výpočtových skriptov, spracovanie vstupných dát, výpočet kvázigeoidu, validácia kvázigeoidu.
- *Juraj Papčo* Príprava časti vstupných dát, diskusia k rukopisu technickej správy, administratívna časť procesu.
- *Juraj Janák* Diskusia k rukopisu technickej správy.

.....	.....	.....
Blažej Bucha	Juraj Papčo	Juraj Janák

Literatúra

Balmino, G., Vales, N., Bonvalot, S., and Briais, A. (2012). Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies. *Journal of Geodesy*, 86:499–520. doi: 10.1007/s00190-011-0533-4.

Barnes, D., Factor, J., Holmes, S., Ingalls, S., Presicci, M., and Beale, J. (2016). Earth Gravitational Model 2020. Thessaloniki, Greece, 19–23 September. Gravity, Geoid and Height Systems 2016.

Barthelmes, F. (2013). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: Theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth models (ICGEM), http://icgem.gfz-potsdam.de. Scientific Technical Report STR09/02, GFZ German Research Centre for Geosciences, Potsdam, Germany, 32 pp.

Bucha, B., Hirt, C., Yang, M., Kuhn, M., and Rexer, M. (2019). Residual terrain modelling (RTM) in terms of the cap-modified spectral technique: RTM from a new perspective. *Journal of Geodesy*. online-first, doi: 10.1007/s00190-019-01303-4.

Bucha, B. and Janák, J. (2013). A MATLAB-based graphical user interface program for computing functionals of the geopotential up to ultra-high degrees and orders. *Computers and Geosciences*, 56:186–196. doi: 10.1016/j.cageo.2013.03.012.

Bucha, B., Janák, J., Papčo, J., and Bezděk, A. (2016). High-resolution regional gravity field modelling in a mountainous area from terrestrial gravity data. *Geophysical Journal International*, 207:949–966. doi: 10.1093/gji/ggw311.

Forsberg, R. (1984). A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Report No. 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 129 pp.

Forsberg, R. and Tscherning, C. C. (1981). The use of height data in gravity field approximation by collocation. *Journal of Geophysical Research*, 86:7843–7854.

Förste, C., Bruinsma, S. L., Abrikosov, O., Lemoine, J.-M., Schaller, T., Götze, H.-J., Ebbing, J., Marty, J. C., Flechtner, F., Balmino, G., and Biancale, R. (2014). EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. In *5th GOCE User Workshop*, Paris, France, 25–28 November.

Freeden, W. and Schneider, F. (1998). An integrated wavelet concept of physical geodesy. *Journal of Geodesy*, 72:259–281.

Grombein, T., Seitz, K., and Heck, B. (2013). Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. *Journal of Geodesy*, 87:645–660. doi: 10.1007/s00190-013-0636-1.

Hirt, C., Bucha, B., Yang, M., and Kuhn, M. (2019a). A numerical study of residual terrain modelling (RTM) techniques and the harmonic correction using ultra-high degree spectral gravity modelling. *Journal of Geodesy*. doi: 10.1007/s00190-019-01261-x.

Hirt, C., Featherstone, W. E., and Marti, U. (2010). Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data. *Journal of Geodesy*, 84:557–567. doi: 10.1007/s00190-010-0395-1.

Hirt, C., Yang, M., Kuhn, M., Bucha, B., Kurzmann, A., and Pail, R. (2019b). SRTM2gravity: an ultrahigh resolution global model of gravimetric terrain corrections. *Geophysical Research Letters*, 46:4618–4627. doi: 10.1029/2019GL082521.

Hoffmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer, Wien, New York, 403 pp.

Holmes, S. A. and Featherstone, W. E. (2002). A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 76:279–299. doi: 10.1007/s00190-002-0216-2.

Jarvis, A., Reuter, H. I., Nelson, A., and Guevara, E. (2008). Hole-filled SRTM for the globe Version 4.1. Available from the CGIAR-CSI SRTM 90m Database (http://srtm.csi.cgiar.org).

Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I., and Wittwer, T. (2008). A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82:457–471. doi: 10.1007/s00190-007-0196-3.

Klobušiak, M., Leitmannová, K., and Ferianc, D. (2005). Realizácia záväzných transformácií národných referenčných súradnicových a výškového systému do európského terestrického referenčného systému 1989. In *Geodetické siete a priestorové informácie*, SSGK pri GKÚ, TOPÚ BB, Podbánske 24–26 October.

Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H., and Olson, T. R. (1998). The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96. Technical Report NASA/TP-1998-206861, National Aeronautics and Space Administration, USA, 582 pp.

Mäkinen, J. (2008). The treatment of the permanent tide in EUREF products. EUREF 2008, Brussels, 17–21 June.

Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, Germany, 500 pp.

Moritz, H. (2000). Geodetic reference system 1980. *Journal of Geodesy*, 74:128–133. doi: 10.1007/s001900050278.

Pavlis, N. K., Factor, J. K., and Holmes, S. A. (2007). Terrain-related gravimetric quantities computed for the next EGM. In *Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service vol. 18*, Harita Dergisi, Istanbul, 318–323.

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., and Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model

2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*, 117(B04406):1–38. doi: 10.1029/2011JB008916.

Pašteka, R., Zahorec, P., Mikuška, J., Szalaiová, V., Papčo, J., Krajňák, M., Kušnirák, D., Pánisová, J., Vajda, P., and Bielik, M. (2014). Recalculation of regional and detailed gravity database from Slovak Republic and qualitative interpretation of new generation Bouguer anomaly map. In *Geophysical Research Abstracts*, volume 16, 9439.

Rexer, M., Hirt, C., Bucha, B., and Holmes, S. (2018). Solution to the spectral filter problem of residual terrain modelling (RTM). *Journal of Geodesy*, 92:675–690. doi: 10.1007/s00190-017-1086-y.

Smith, D. A. (1998). There is no such thing as "the" EGM96 geoid: subtle points on the use of a global geopotetial model. *IGeS Bulletin*, 8:17–28.

Tsoulis, D. (2012). Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. *Geophysics*, 77:F1–F11. doi: 10.1190/GEO2010-0334.1.

Zahorec, P., Pašteka, R., Mikuška, J., Szalaiová, V., Papčo, J., Kušnirák, D., Pánisová, J., Krajňák, M., Vajda, P., Bielik, M., and Marušiak, I. (2017). National Gravimetric Database of the Slovak Republic. In Pašteka, R., Mikuška, J., and Meurers, B., editors, *Understanding the Bouguer Anomaly*, pages 113–125. Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-12-812913-5.00006-3.